学芸学部　数学科

２０２０年度特別入学試験（帰国生、在日外国人学校出身者対象）

科目名：数学　【解答／解答例】

■ 1.

$f(x)$ の微分を計算すると

$$f'(x) = \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} - a$$

となる。$g(x) = \dfrac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$ とおくと $f'(x) = g(x) - a$ である。$g(x)$ の微分を計算すると

$$g'(x) = \frac{-\log x}{4x\sqrt{x}}$$

となる。$x > 0$ の範囲での $g(x)$ の増減は

x		1	
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$

となり、$g(x)$ は $x = 1$ で最大値 1 をとることが分かる。

- $a \geqq 1$ のとき。$x \neq 1$ において $f'(x) = g(x) - a < 0$ であり、$x = 1$ においては $f'(x) \leqq 0$ である。よって $f(x)$ は単調減少となる。
- $a < 1$ のとき。$x = 1$ の近くで $f'(x) > 0$ となるので、$f(x)$ は単調減少ではない。

以上より、求める a の値の範囲は $a \geqq 1$ である。

■ 2.

(1)

$f(x) = \tan x - (1 - e^{-x})$ とおく。$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x) \geqq 0$ を示せばよい。

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - e^{-x},$$

$$f''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} + e^{-x}$$

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ のとき、

$$0 \leqq \sin x < 1, \quad 0 < \cos x \leq 1, \quad e^{-x} > 0$$

より、$f''(x) \geqq 0$。

これより、$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f'(x) \geqq f'(0) = 0$。

これより、$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x) \geqq f(0) = 0$ となる。

(2)

(1) より、$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ で $f(x) \geqq 0, f(0)=0$ だから、次の定積分を求めればよい。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - 1 + e^{-x})dx &= \left[-\log|\cos x| - x - e^{-x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} - e^{-\frac{\pi}{4}} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\log 2 - \frac{\pi}{4} - e^{-\frac{\pi}{4}} + 1\end{aligned}$$

■ 3.

(1)

まず、

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{b} + \vec{c}$$

であり、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \vec{c}$$

であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}$$

である。また、

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{a} + \vec{b}$$

であるから、

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{a} + \vec{b} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \vec{c}$$

である。

(2)

まず、条件より

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0, \quad \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \cos\theta$$

である。また、内積の性質より、

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cos\angle\mathrm{APC} \quad \cdots \text{①}$$

である。ここで (1) より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} &= \left(-\frac{3}{4}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} - \vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \vec{c}\right) \\ &= -\frac{3}{16}|\vec{a}|^2 - \frac{3}{16}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - \frac{5}{8}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c} \\ &= \frac{5}{8},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 &= \left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{a} - \frac{1}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\overrightarrow{a} - \frac{1}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)\\
&= \frac{9}{16}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{1}{16}|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} + \frac{3}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\
&= \frac{13}{8} + 2\cos\theta,\\
|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2 &= \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{a} + \frac{3}{4}\overrightarrow{b} - \overrightarrow{c}\right)\\
&= \frac{1}{16}|\overrightarrow{a}|^2 + \frac{9}{16}|\overrightarrow{b}|^2 + |\overrightarrow{c}|^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} - \frac{1}{2}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} - \frac{3}{2}\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\
&= \frac{13}{8} - 2\cos\theta
\end{aligned}
$$

であるから、① に代入して、

$$
\cos\angle\mathrm{APC} = \frac{5}{8\sqrt{\left(\frac{13}{8}\right)^2 - 4\cos^2\theta}}
$$

を得る。

(3)

$f(\theta) = \left(\frac{13}{8}\right)^2 - 4\cos^2\theta \left(\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi\right)$ とする。(2) より、$\cos\angle\mathrm{APC}$ が最小となるのは $f(\theta)$ が最大となるときである。ここで、

$$
f'(\theta) = 8\cos\theta\sin\theta, \quad f''(\theta) = 8(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
$$

であるから、$f'(\theta) = 0$ となるのは $\theta = \frac{\pi}{2}$ のみであり、$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8 < 0$ である。よって $f(\theta)$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{13}{8}$ をとるから、$\cos\angle\mathrm{APC}$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{13}$ をとる。

■ 4.

(1)

数学的帰納法を用いて証明する。

$n = 2$ のとき、$a_2 = a_1^2 + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}$ より、$0 < a_2 < \frac{1}{3}$ が成り立つ。

$n = k \geqq 2$ のとき $0 < a_k < \frac{1}{3}$ と仮定する。この式をそれぞれ 2 乗して $\frac{2}{9}$ を加えると、

$$
0 < \frac{2}{9} < a_k^2 + \frac{2}{9} < \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{1}{3}
$$

となる。$a_k^2 + \frac{2}{9} = a_{k+1}$ より、$n = k + 1$ のときにも $0 < a_{k+1} < \frac{1}{3}$ が成り立つことを示せた。

よって、すべての $n \geqq 2$ に対して $0 < a_n < \frac{1}{3}$ が成り立つ。

(2)

示す式の左辺は

$$\left|a_{n+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|a_n^2-\frac{1}{9}\right| = \left|a_n+\frac{1}{3}\right|\left|a_n-\frac{1}{3}\right| \quad \cdots ①$$

と書き直せる。この最後の式について、$n \geqq 2$ のときは (1) で示した $0 < a_n < \dfrac{1}{3}$ により、また、$n = 1$ のときは $a_1 = 0$ であることより、

$$\left|a_n+\frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3} \quad \text{かつ} \quad \left|a_n-\frac{1}{3}\right| > 0$$

が成り立つことがわかる。これを ① とあわせると、

$$\left|a_{n+1}-\frac{1}{3}\right| = \left|a_n+\frac{1}{3}\right|\left|a_n-\frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}\left|a_n-\frac{1}{3}\right|$$

となり、目標の式を得ることができた。

(3)

(2) より、

$$0 < \left|a_{n+1}-\frac{1}{3}\right| < \left(\frac{2}{3}\right)^n\left|a_1-\frac{1}{3}\right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n\frac{1}{3}$$

であるから、数列 $\{c_n\}$ を初項 $\dfrac{1}{3}$、公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列とすれば、$0 < \left|a_n-\dfrac{1}{3}\right| \leqq c_n$ であることがわかる。$0 < \dfrac{2}{3} < 1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ であるから、はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|a_n-\frac{1}{3}\right| = 0$ がわかる。したがって、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ である。