

数 学 科	科 目	数 学	受 験 番 号		氏 名	
-------	--------	-----	------------------	--	--------	--

## 特別入試 数学

1.  $a$  は正の定数とする。関数  $f(x) = \sqrt{x} \log x - ax$  が  $x > 0$  で単調減少であるように、定数  $a$  の値の範囲を定めよ。

2. (1)  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$  のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\tan x \geq 1 - e^{-x}$$

(2) 曲線  $y = \tan x$ ,  $y = 1 - e^{-x}$  および直線  $x = \frac{\pi}{4}$  によって囲まれた図形の面積を求めよ。

3. 平行六面体  $ABCD - EFGH$  において  $\angle BAD = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle BAE = \angle DAE = \theta$  ( $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3}{4}\pi$ ),  $AB = AE = AD = 1$  とする。さらに、線分  $FH$  を  $1:3$  に内分する点を  $P$  とする。

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$  とおくと、次の問いに答えよ。

(1)  $\overrightarrow{PA}$ ,  $\overrightarrow{PC}$  を  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  を用いて表せ。

(2)  $\cos \angle APC$  を  $\theta$  を用いて表せ。

(3)  $\cos \angle APC$  の最小値を求めよ。

4. 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n^2 + \frac{2}{9}$$

で定める。

(1)  $n \geq 2$  のとき、次の不等式を証明せよ。

$$0 < a_n < \frac{1}{3}$$

(2)  $n \geq 1$  のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\left| a_{n+1} - \frac{1}{3} \right| < \frac{2}{3} \left| a_n - \frac{1}{3} \right|$$

(3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ。