学芸学部　数学科
２０２０年度　編入学試験
科目名：専門科目（３年次編入）　【解答／解答例】

＜微分積分学＞

■ **1.**

(1)

定義より $x = \dfrac{1}{2}\tan y$ であり、$x$ は $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$ で単調であるから、逆関数の微分法より

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = 2\cos^2 y = \frac{2}{1+\tan^2 y} = \frac{2}{1+(2x)^2} = \frac{2}{1+4x^2}$$

である。

(2)

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f''''(x) = \sin x$$

であり、

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1$$

であるから、

$$f(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_4(x), \quad R_4(x) = \frac{\sin\theta x}{24}x^4 \ \ (0 < \theta < 1)$$

である。

(3)

(i) $\pi > 3$ より、

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{\pi-2}}dx = \lim_{a\to\infty}\left[\frac{x^{3-\pi}}{3-\pi}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{(3-\pi)a^{\pi-3}} - \frac{1}{3-\pi}\right) = \frac{1}{\pi-3}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(\log x)^2}dx &= \lim_{a\to+0}\int_a^{\frac{1}{2}} \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}dx \\
&= \lim_{a\to+0}\int_{\log a}^{\log\frac{1}{2}} \frac{1}{t^2}dt \qquad (t = \log x) \\
&= \lim_{a\to+0}\Big[-t^{-1}\Big]_{\log a}^{\log\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{a\to+0}\left(-\frac{1}{\log\frac{1}{2}} + \frac{1}{\log a}\right) \\
&= \frac{1}{\log 2}
\end{aligned}$$

**■ 2.**

(1)

累次積分に直して計算する。

$$\begin{aligned}\iint_D \sin(x+y)\,dxdy &= \int_0^2 dy \int_0^{\frac{y}{2}} \sin(x+y)\,dx \\ &= \int_0^2 \big[-\cos(x+y)\big]_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} dy \\ &= \int_0^2 \left(-\cos\frac{3}{2}y + \cos y\right) dy \\ &= -\frac{2}{3}\sin 3 + \sin 2\end{aligned}$$

(2)

極座標に変換して計算する。

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^3 dr \int_0^{2\pi} r^3 e^{-r^2}\,d\theta \\ &= 2\pi \int_0^3 r^3 e^{-r^2}\,dr \\ &= 2\pi \int_0^3 r^2 \left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)' dr \\ &= 2\pi \left( \left[-\frac{1}{2}r^2 e^{-r^2}\right]_0^3 + \int_0^3 r e^{-r^2}\,dr \right) \qquad \text{(部分積分)} \\ &= 2\pi \left( -\frac{9}{2}e^{-9} + \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^3 \right) = \pi(-10e^{-9}+1)\end{aligned}$$

＜線形代数学＞

**■ 1.**

(1)

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -11 \end{bmatrix}$$

(2)

$A$ の左下の 4 つの成分が 0 であることに着目して、

$$|A| = \left|\begin{array}{cc|cc} 2x & x & 3 & 1 \\ x-1 & x & 0 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & x \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 2x & x \\ x-1 & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & x \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = (x^2+x)(x-2) = x^3 - x^2 - 2x$$

(3)

$x=1$ のとき、$|A|=-2\neq 0$ となるので、$A$ は正則行列である。また、$A$ の逆行列は

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/2 & -1/2 & -2 & -5/2\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

となる。

■ **2.**

(1)

$A$ を簡約化すると

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

となる。連立一次方程式 $A\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ を解くことは $B\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$ を解くことに等しいから、この解は

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\quad (c\in\mathbb{R})$$

となる。よって $T$ の核の基底として

$$\left\{\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

が挙げられる。

(2)

$A$ の固有多項式は $t(t-2)(t-3)$ であり，固有値 $0,2,3$ の固有ベクトルとしてそれぞれ

$$\begin{bmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}-2\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

をとることができる。これらの固有ベクトルは１次独立であるから $A$ は対角化可能である。実際、

$$P=\begin{bmatrix}-2 & -1 & -2\\ -1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

とおけば、

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

となる。

(3)

$A$ の列ベクトルを左から $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ とおく。$T$ の像は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ によって生成されるが、$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は一次独立であり、また $\boldsymbol{a}_3 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$ であるから、$\{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2\}$ は $T$ の像の基底である。