学芸学部　数学科
２０２４年度　編入学試験
科目名：専門科目（２年次編入）　【解答／解答例】

＜微分積分学＞

■1.

(1)

定義域は $x>0$ である。$y=x^{\cos x}$ の両辺の対数をとり微分すると

$$\frac{y'}{y}=(\cos x\log x)'=-\sin x\log x+\frac{1}{x}\cos x$$

これから

$$y'=\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)y=\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)x^{\cos x}$$

(2)

$f(x)=\log(1+x)$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\quad f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2},\quad f^{(3)}(x)=\frac{2}{(1+x)^3},\quad f^{(4)}(x)=\frac{-6}{(1+x)^4}$$

これから $f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f^{(3)}(0)=2$ となり、テイラーの定理から

$$f(x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+R_4(x),\quad R_4(x)=-\frac{x^4}{4(1+\theta x)^4},\ 0<\theta<1$$

となる。ここで、$0<\theta<1$ なので $0\le|\theta x|\le|x|$ となり $\lim_{x\to 0}\theta x=0.$ したがって

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{x}{4(1+\theta x)^4}\right)=0$$

これから

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+R_4(x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}+R_4(x)}{x^3}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(3)

部分分数分解すると

$$\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{3}{x+1}-\frac{3}{x+2}-\frac{1}{(x+2)^2}$$

これから

$$\int_0^1\frac{2x+5}{(x+1)(x+2)^2}dx=\left[3\log(x+1)-3\log(x+2)+\frac{1}{x+2}\right]_0^1=6\log 2-3\log 3-\frac{1}{6}$$

(4)

$f(x)=e^x$ とおくと、任意の n について $f^{(n)}(x)=e^x$、$f^{(n)}(0)=1$ なので、テイラーの定理により

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{e^{\theta x}}{3!}x^3,\quad 0<\theta<1$$

$x \geq 1$ のとき $x, \dfrac{e^{\theta x}}{3!}x^3 \geq 0$ なので

$$e^x \geq \frac{x^2}{2} \qquad \therefore \frac{\sqrt{x}}{e^x} \leq \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$$

ここで、$\dfrac{3}{2} > 1$ なので $\displaystyle\int_1^\infty \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ は収束する。したがって $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x}dx$ は収束する。

■ 2.

(1)

極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{2x^2+y^2}$ が存在するとは、(x,y) がどのように $(0,0)$ に近づいても $\dfrac{x^2+3y^2}{2x^2+y^2}$ が同じ値に収束することである。

$m \in \mathbb{R}$ とすると

$$\lim_{(x,mx)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{2x^2+y^2} = \frac{1+3m^2}{2+m^2}$$

この値は、m の値によって変わるので極限値 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2}{2x^2+y^2}$ は存在しない。

(2)

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ より、

$$f_x(x,y) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}, \quad f_{xx}(x,y) = \frac{-2xy}{(y^2+x^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2+x^2}, \quad f_{yy}(x,y) = \frac{2xy}{(y^2+x^2)^2}$$

これより、

$$f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0$$

(3)

まず、$f(x,y)$ の臨界点を求める。

$$f_x(x,y) = 2xy = 0, \quad f_y(x,y) = x^2+3y^2-3 = 0$$

を解いて、$(x,y) = (0,\pm 1), (\pm\sqrt{3},0)$。

$$f_{xx}(x,y) = 2y, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x, \quad f_{yy}(x,y) = 6y$$

より、ヘシアンは、

$$H(x,y) = 2y \times 6y - (2x)^2 = 12y^2 - 4x^2$$

これから、

$$H(0,\pm 1) = 12 > 0, \quad H(\pm\sqrt{3},0) = -12 < 0, \quad f_{xx}(0,\pm 1) = \pm 2 \text{（複号同順）}$$

よって、求める極値は $f(0,1) = -2$ が極小値、$f(0,-1) = 2$ が極大値である。

学芸学部　数学科
２０２４年度　編入学試験
科目名：専門科目（２年次編入）　【解答／解答例】

＜線形代数学＞

■ **1.**

(1)

行列 A と B の積 AB が定義されるのは A の列数と B の行数が等しいときである。

(a) 左の行列は 2 列、右の行列は 3 行なので、 ×

(b) 左の行列の列数と右の行列の行数はともに 1 なので積は定義される。

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1) & 2\cdot 1 & 2\cdot 0 & 2\cdot 3 \\ -1\cdot(-1) & -1\cdot 1 & -1\cdot 0 & -1\cdot 3 \\ 1\cdot(-1) & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(c) 左の行列の列数と右の行列の行数はともに 2 なので積は定義される。

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 2\cdot(-3) \\ 1\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) \\ 0\cdot 4 + (-5)\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

(2)

偽

(反例) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \pm E$ は $A^2 = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 \\ 0 & (-1)^2 \end{bmatrix} = E$ をみたす。

(3)

連立 1 次方程式 $(*)$ が解を持つための必要十分条件は係数行列の階数と拡大係数行列の階数が等しいことである。拡大係数行列を簡約化していくと、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & | & -a \\ 4 & 3 & -2 & 5 & | & a \\ 1 & -1 & 3 & -4 & | & 2-3a \\ 3 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(1\text{ 行})-(4\text{ 行})} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & | & -a \\ 4 & 3 & -2 & 5 & | & a \\ 1 & -1 & 3 & -4 & | & 2-3a \\ 3 & 2 & -1 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行})+(1\text{ 行})\times 3]{\substack{(2\text{ 行})+(1\text{ 行})\times 4 \\ (3\text{ 行})+(1\text{ 行})}}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -2 & | & -a \\ 0 & -1 & 2 & -3 & | & -3a \\ 0 & -2 & 4 & -6 & | & 2-4a \\ 0 & -1 & 2 & -3 & | & -3a \end{bmatrix} \xrightarrow[(2\text{ 行})\times(-1)]{(1\text{ 行})\times(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & | & a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 3a \\ 0 & -2 & 4 & -6 & | & 2-4a \\ 0 & -1 & 2 & -3 & | & -3a \end{bmatrix} \xrightarrow[(4\text{ 行})+(2\text{ 行})]{\substack{(1\text{ 行})-(2\text{ 行}) \\ (3\text{ 行})+(2\text{ 行})\times 2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & -2a \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

となり、係数行列と拡大係数行列の階数が一致するのは $a+1=0$ のときである。したがって、$(*)$ が解を持つような a の値は $a=-1$ である。

$a=-1$ の場合、上の計算の最後の行列は $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ となるので, 連立 1 次方程式 $(*)$

の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

■ 2.

(1)

正方行列が正則行列にならないための必要十分条件は、行列式が 0 となることである。与えられた行列の行列式を計算すると、

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 2 & k & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 2 \\ 0 & 7 & 1 & -1 \\ 0 & k & -(2k+1) & -4 \\ 0 & -4 & 2k & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ k & -(2k+1) & -4 \\ -4 & 2k & 5 \end{vmatrix}$$

(第 1 列に関する余因子展開)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ k-28 & -(2k+5) & -4 \\ 31 & 2k+5 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} k-28 & -(2k+5) \\ 31 & 2k+5 \end{vmatrix}$$

(第 1 行に関する余因子展開)

$$= (2k+5) \begin{vmatrix} k-28 & 1 \\ 31 & -1 \end{vmatrix} = (2k+5)\{-(k-28)-31\}$$
$$= -(k+3)(2k+5)$$

となるので、これが 0 となるような k を求めると $k = -3, -\dfrac{5}{2}$ となる。

(2)

n 次正方行列 $A \neq O$ が正則行列でないことは、A の階数が n より真に小さいことと同値であるため、連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ で、ある $1 \leq k \leq n$ に対して $x_k \neq 0$ となるものが存在する。また、A の行列式と A の転置行列 ${}^tA$ の行列式は一致するので、A が正則行列でないことは ${}^tA$ が正則行列でないこと、すなわち ${}^tA$ の階数が n より真に小さいことと同値である。したがって、連立 1 次方程式 ${}^tA\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ で、ある $1 \leq l \leq n$ に対して $y_l \neq 0$ となるものが存在する。このとき $X = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{y} = [x_i y_j]_{1 \leq i,j \leq n}$ と定めると、X が題意を満たす。実際、X の (k, l) 成分が $x_k y_l \neq 0$ であるた

め $X \neq O$ であり、かつ

$$AX = (A\boldsymbol{x})^t\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\,{}^t\boldsymbol{y} = O, \qquad XA = \boldsymbol{x}\,({}^t\boldsymbol{y}A) = \boldsymbol{x}\,{}^t({}^tA\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\,{}^t\boldsymbol{0} = O$$

が成り立つ。